Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»»

Международная Лаборатория СтохастическогоАнализа и его
Приложений

Кожина Анна Александровна

Метод параметрикса и его применения в теории вероятностей

Резюме диссертации
на соискание ученой степени кандидата
математических наук НИУ ВШЭ

Научный руководитель
Конаков Валентин Дмитриевич
д.ф.-м.н., профессор

Москва – 2018

Моделирование многих природных процессов до сих пор остается сложной задачей для исследователя. Данные и наблюдения, которые могут быть получены из окружающего мира, часто содержат множество неточностей или шум. Используя только лишь детерменированные модели, мы достаточно быстро достигаем предела точности. В связи с этим, исследователи во многих областях науки были вынуждены внедрять модели, обладающие дополнительной случайностью в своей структуре.

Один из возможных способов моделировать случайную составляющую процесса - воспользоваться описанием его динамики через решение стохастического дифференциального уравнения (СДУ далее). В частости, мы будем работать с уравнениями, содержащими, так называемую, броуновскую компоненту, а именно, задаваемыми следующим соотношением:

$$Z_t = z + \int_0^t b(s, Z_s)ds + \int_0^t \sigma(s, Z_s)dW_s, \tag{1}$$

где $(W_s)_{s\geq 0}$ есть $\mathbb{R}^k$-мерное броуновское движение на некотором вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, Z_t - $\mathbb{R}^m$ мерный процесс, где $m \in \mathbb{N}$ может отличаться от k. Коэффициенты уравнения b, σ - $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^k$ значные функции соответственно, такие, что слабое решение (1) существует.

Уравнения вида (1) используются во многих приложениях от физики дл финансовой математики. Так, например, мы отсылаем читателя к исследованию моделей Гамильтоновой механики в работе [Tal02], и финансовым моделям, рассмотренным в статье [JYC10], биологическим приложениям, приведенным в ([Bai17], [BY89]).

За исключением некоторых весьма специфических случаев, решение уравнения вида (1) не может быть найденно в явном виде, а, значит, перед нами стоит задача поиска хорошего приближения. Одним из наиболее эффективных и простых методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений до сих пор является метод Эйлера - Маруямы, предложенный в рамках решения схожей задачи в работе [Mar55]. По своей сути метод аналогичен технике, применяемой к обычным дифференциальным уравнениям. Зафиксируем временной интервал $T > 0$, для некоторого натурального N, означающего число шагов по времени в интервале $[0, T]$, введем шаг $h = T/N$ и для всех $t \in [0, T]$:

$$Z_t^h = z + \int_0^t b(\phi(s), Z^h_{\phi(s)})ds + \int_0^t \sigma(\phi(s), Z^h_{\phi(s)})dW_s, \tag{2}$$

где $t_i := ih, i \in [0, N]$ и функция $\phi(s) = t_i$ определена для $s \in [t_i, t_{i+1}[$. В силу приведенного выше описания, Z^h возможно симулировать.

Для того, чтобы изучать точность аппроксимационной схемы, приведенной в (2) для исходного СДУ (1), обычно выделяют для основных типа ошибки. Первый тип (см. [Mar55], Гихман и Скороход [GS67], [GS82]), в литературе известен как *сильная ошибка.* Для всех $p \in [1, +\infty)$ в стандартных марковских обозначениях для процессов Z_s^h, Z_s, стартующих из точки z в момент времени 0:

$$\mathcal{E}_S(T,z,h,p) := \Big(\mathbb{E}_z\big[\sup_{s\in[0,T]} |Z_s^{h,0,z} - Z_s^{0,z}|^p\big]\Big)^{1/p}. \tag{3}$$

Для случая коэффициентов (1), непрерывных по Липшицу по пространственным переменным и, по крайней мере, непрерывных по Гельдеру по времени с показателем $1/2$, с помощью стандартных инструментов стохастического анализа, в частности, формулы Ито, неравенства Буркхельдера-Дэвиса-Гунди и леммы Гронуолла, можно показать, что:

$$\exists C_p(T,b,\sigma),\ \mathcal{E}_S(T,z,h,p) \le C_p(T,b,\sigma)h^{1/2}.$$

С другой стороны, для таких приложений, как определение цен деривативов в финансовой математике, нам важнее знать, так называемую, *слабую* ошибку между объектами, введенными в (1) и (2). Для *подходящего* класса тестовых функций f (строгое определение класса представлено подробно в работе) можно определить:

$$\mathcal{E}_W(T,z,h,f) := \mathbb{E}_z[f(Z_T^{h,0,z})] - \mathbb{E}_z[f(Z_T^{0,z})]. \tag{4}$$

Выделим два типа условий, которые гарантируют нам, что скорость сходимости для $\mathcal{E}_W(T,z,h,f)$ на самом деле порядка h. В частности,

(i) b, σ, f - гладкие и невырожденные

или

(ii) b, σ обладают некоторыми структурными особенностями (например, генератор, ассоциированный с (1), эллиптичен или гипоэллиптичен) и некоторой гладкостью, а f удовлетворяет некоторым условиям на рост функции (в том числе, верно для случая дельта-функций).

В указанных предположениях,

$$|\mathcal{E}_W(T,z,h,f)| = |\mathbb{E}_z[f(Z_T^{h,0,z})] - \mathbb{E}_z[f(Z_T^{0,z})]| \le C(T,f,\sigma,b)h. \tag{5}$$

В обоих случаях (i) и (ii) основным инструментом анализа является соответствие между $\mathbb{E}_z[f(Z_T^h)]$ и решением параболического уравнения в частных производных второго порядка. Это соответствие дает нам формула Фейнмана - Каца. В предположениях, указанных выше, используя стандартные марковские обозначения, $v(t,z) := \mathbb{E}[f(Z_T^{t,z})]$ является решением следующего уравнения:

$$\begin{cases}(\partial_t + L_t)v(t,z) = 0,\ (t,z) \in [0,T[\times\mathbb{R}^m,\\ v(T,z) = f(z),\ z\in\mathbb{R}^m,\end{cases} \tag{6}$$

где

$$L_t v(t,z) = \langle b(t,z), \nabla_z v(t,z)\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(a(t,z)D_z^2 v(t,z)\Big), a(t,z) := \sigma\sigma^*(t,z),$$

- генератор, ассоциированный с (1). Предполагая некоторую гладкость на v, можно получить

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_W(T,z,h,f) &= \mathbb{E}[f(Z_T^{h,0,z})] - \mathbb{E}[f(Z_T^{0,z})] = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}[v(t_{i+1}, Z_{t_{i+1}}^{h,0,z}) - v(t_i, Z_{t_i}^{h,0,z})] \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}\Big[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Big\{\partial_s v(s, Z_s^{h,0,z}) + \nabla_z v(s, Z_s^{h,0,z}) b(t_i, Z_{t_i}^{h,0,z}) \\
&+ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(D_z^2 v(s, Z_s^{h,0,z}) a(t_i, Z_{t_i}^{h,0,z}))\Big\} ds\Big] \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}\Big[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Big\{\partial_s v + L_s v\Big\}(Z_s^{h,0,z}) ds\Big] \\
&+ \mathbb{E}\Big[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Big\{\nabla_z v(s, Z_s^{h,0,z}) \cdot (b(t_i, Z_{t_i}^{h,0,z}) - b(s, Z_s^{h,0,z})) \\
&+ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(D_z^2 v(s, Z_s^{h,0,z})(a(t_i, Z_{t_i}^{h,0,z}) - a(s, Z_s^{h,0,z})))\Big\} ds\Big] \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}\Big[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Big\{\nabla_z v_\varepsilon(s, Z_s^{h,0,z}) \cdot (b(t_i, Z_{t_i}^{h,0,z}) - b(s, Z_s^{h,0,z})) \\
&+ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(D_z^2 v(s, Z_s^{h,0,z})(a(t_i, Z_{t_i}^{h,0,z}) - a(s, Z_s^{h,0,z})))\Big\} ds\Big], \qquad (7)
\end{aligned}
$$

используя тот факт, что v является решением соответствующего уравнения в частных производных для перехода в последнем неравенстве и формулу Ито для третьего равенства в цепочке. Из разложения, аналогичного разложению Тейлора, в случае, когда выполнено (i) или (ii), возможно получить оценки для (7), показывая, что каждая составляющая (7) имеет порядок h^2. Это приводит к тому, что ошибка в целом имеет порядок h, получаемый после суммирования от 0 до $N-1$.

В случае (i), который был рассмотрен в работе Talay и Tubaro [TT90], гладкость v выводится с помощью техники стохастических потоков. Для случая (ii) заметим, что в условиях гипоэллиптичности слабой или сильной (см. подробно Раздел 4.1.1.), Bally и Talay [BT96a], [BT96b] получили оценку слабой ошибки (5) для ограниченных борелевских функций f и масс Дирака, применяя соответственно результаты Kusuoka и Stroock [KS84], [KS85] для производных переходных плотностей диффузионного процесса. Однако для использования данного метода, который позволяет рассматривать даже модели, включающие некоторое вырождение, нам необходимо предположение о гладкости коэффициентов. В равномерно эллиптичном случае возможно использовать иной подход, разработанный в работах Konakov и Mammen [KM00], [KM02], основанный на разложении параметрикса. Авторам, в том числе, удалось рассмотреть и случай масс Дирака в (4).

В общих чертах, разложение параметрикса состоит в аппроксимации переходной плотности процесса с переменными коэффициентами с помощью переходных плотностей процессов с постоянными коэффициентами. В частности, если мы можем подобрать хороший аппроксимирующий процесс, (например, для коэффициентов b и σ в (1) - невырожденных и ограниченных), то метод параметрикса позволяет проводить анализ слабой ошибки приближения в достаточно слабых предположениях. Мы можем в качестве примера упомянуть работу Il'in *et al.* [IKO62], в которой авторы использовали приближения гауссовскими ядрами для переходной плотности решения уравнения (1) для ограниченных коэффициентов, непрерывных по Гельдеру в случае, когда матрица $\sigma\sigma^*$ невырождена. Аналогичные оценки были использованы Konakov и Menozzi в работе [KM17] для того, чтобы в случае невырожденных непрерывных по Гельдеру коэффициентов $b, \sigma \in C^{\gamma/2,\gamma}([0,T], \mathbb{R}^k),\ \gamma \in (0,1]$ и $f \in C^{\beta}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}), \beta \in (0,1]$ оценку:

$$|\mathcal{E}_W(T,z,h,f)| = |\mathbb{E}_z[f(Z_s^h)] - \mathbb{E}_z[f(Z_s)]| \leq C(T,f,\sigma,b)h^{\gamma/2}, \tag{8}$$

улучшая результат Mikulevičius и Platen, полученный в работе [MP91], где авторы вывели границу для (8), где $f \in C^{2+\gamma}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$. Дополнительное условие гладкости, использованное выше, было необходимо для применения оценок Шаудера (см. так же [IKO62]).

Интуитивно, указанная выше скорость сходимости может быть объяснена тем фактом, что в условиях малой гладкости коэффициентов невозможно получить разложение в (7) большего порядка. Конкретнее, мы лишь можем использовать γ непрерывность по Гельдеру коэффициентов, которая влечет следующий контроль приращений

$$\mathbb{E}[|b(s,Z_s^h) - b(\phi(s), Z_{\phi(s)}^h)|] + \mathbb{E}[|a(s,Z_s^h) - a(\phi(s), Z_{\phi(s)}^h)|] \leq C(b,\sigma)h^{\gamma/2}.$$

Другими словами, скорость сходимость скорее близка к сходимости *сильной ошибки* в (3).

На данный момент для многих приложений, таких как нейронауки или диффузии в случайных средах, важно рассматривать случай негладких коэффициентов, например, случай кусочно-гладкого тренда в моделе (1). В указанных предположениях, приведенные выше методы и оценки более неприменимы. Отталкиваясь от случая оценки слабой ошибки для тестовых функций вида масс Дирака, в соавторстве с V. Konakov и S. Menozzi мы продолжили изучать устойчивость плотностей для уравнений вида (1) по отношению к малым возмущениям коэффициентов. Данный результат представлен в Главе 3, и был опубликован в работе [KKM17].

Введем уравнение вида:

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t,\ t \in [0,T], \tag{9}$$

где $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d,\ \sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ - ограниченные коэффициенты, измеримые по времени и непрерывные по Гельдеру по пространственной компоненте. Кроме того, $a(t,x) := \sigma\sigma^*(t,x)$ предполагается равномерно эллиптической матрицей. Данные условия гарантируют, что (9) обладает единственным решением, см. Bass и Perkins [BP09], [Men11], из чего следует единственность мартингальной проблемы для ассоциированного генератора в указанных выше предположениях. Введем для фиксированного малого параметра $\varepsilon > 0$ возмущенную версию уравнения (9) вида:

$$dX_t^{(\varepsilon)} = b_\varepsilon(t, X_t^{(\varepsilon)})dt + \sigma_\varepsilon(t, X_t^{(\varepsilon)})dW_t,\ t \in [0,T], \tag{10}$$

где $b_\varepsilon : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d,\ \sigma_\varepsilon : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ удовлетворяют, по крайней мере, тем же предположениям, что и b, σ, и, в некотором смысле, предполагаются близкими к b, σ для малых ε.

Известно, что во введенных выше предположениях переходные плотности процессов $(X_t)_{t\geq 0}, (X_t^{(\varepsilon)})_{t\geq 0}$ существуют и удовлетворяют некоторым гауссовским оценкам, см. Aronson [Aro59] или [DM10] для обобщения на вырожденный случай.

В Главе 3 мы исследуем с помощью метода параметрикса, каким образом близость коэффициентов возмущенного уравнения $(b_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$ к коэффициентам (b, σ) исходного уравнения отражается на поведении соответствующих переходных плотностей процессов. Наши результаты об устойчивости переходных плотностей к малым возмущениям коэффициентов применимы и для случая двух Марковских цепей с соответстующими динамиками:

$$\begin{aligned} Y_{t_{k+1}} &= Y_{t_k} + b(t_k, Y_{t_k})h + \sigma(t_k, Y_{t_k})\sqrt{h}\xi_{k+1}, Y_0 = x, \\ Y_{t_{k+1}}^{(\varepsilon)} &= Y_{t_k}^{(\varepsilon)} + b_\varepsilon(t_k, Y_{t_k}^{(\varepsilon)})h + \sigma_\varepsilon(t_k, Y_{t_k}^{(\varepsilon)})\sqrt{h}\xi_{k+1}, Y_0^{(\varepsilon)} = x, \end{aligned} \tag{11}$$

где $h > 0$ - заданный шаг по времени, для всех $k \geq 0,\ t_k := kh$ и $(\xi_k)_{k\geq 1}$ - центрированные одинаково распределенные независимые случайные величины, удоблетворяющие некоторым условиям интегрируемости. Как и ранее, основными инструментами анализа являются техника параметрикса и гауссовские предельные теоремы.

Уточним условия **(A)**, которые мы будем использовать в Главе 3. Зафиксируем параметр $\varepsilon > 0$. Константы, использованные для предположений, не будут зависеть от ε.

(A1) (Ограниченность коэффициентов). Компоненты вектор-функций $b(t,x), b_\varepsilon(t,x)$ и матриц $\sigma(t,x), \sigma_\varepsilon(t,x)$ - ограничены. То есть, существуют константы $K_1, K_2 > 0$, такие что,

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d} |b(t,x)| + \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d} |b_\varepsilon(t,x)| \leq K_1,$$
$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d} |\sigma(t,x)| + \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d} |\sigma_\varepsilon(t,x)| \leq K_2.$$

(A2) (Равномерная эллиптичность). Матрицы $a := \sigma\sigma^*, a_\varepsilon := \sigma_\varepsilon\sigma_\varepsilon^*$ равномерно эллиптичны, то есть, существует $\Lambda \geq 1,\ \forall (t,x,\xi) \in [0,T] \times (\mathbb{R}^d)^2$,

$$\Lambda^{-1}|\xi|^2 \leq \langle a(t,x)\xi, \xi\rangle \leq \Lambda|\xi|^2, \Lambda^{-1}|\xi|^2 \leq \langle a_\varepsilon(t,x)\xi, \xi\rangle \leq \Lambda|\xi|^2.$$

(**A3**) **(Непрерывность по Гельдеру по пространству)**. Для некоторых $\gamma \in (0,1]$, $\kappa < \infty$, для всех $t \in [0,T]$,

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| + |\sigma_\varepsilon(t,x) - \sigma_\varepsilon(t,y)| \quad \le \quad \kappa\,|x-y|^\gamma .$$

Заметим, что последнее условие, в силу ограниченности $\sigma, \sigma_\varepsilon$, дает то, что a, a_ε так же равномерно γ непрерывны по Гельдеру.

Для заданного $\varepsilon > 0$, будем говорить, что условия **(A)** выполнены, если выполнены **(A1)-(A3)**. Введем величины, которые понадобятся нам для оценки близости переходных плотностей. Положим для $\varepsilon > 0$:

$$\Delta_{\varepsilon,b,\infty} := \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d} \{|b(t,x) - b_\varepsilon(t,x)|\},$$
$$\forall q \in (1,+\infty],\ \Delta_{\varepsilon,b,q} := \sup_{t\in[0,T]} \|b(t,.) - b_\varepsilon(t,.)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

Так как $\sigma, \sigma_\varepsilon$ обе γ- непрерывны по Гельдеру, см. (**A3**), мы так же определим

$$\Delta_{\varepsilon,\sigma,\gamma} := \sup_{u\in[0,T]} |\sigma(u,.) - \sigma_\varepsilon(u,.)|_\gamma,$$

где $\gamma \in (0,1]$, $|.|_\gamma$ означает обычную норму Гельдера по пространству для функций класса $C_b^\gamma(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$ (см. Krylov [Kry96]), точнее:

$$|f|_\gamma := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)| + [f]_\gamma,\ [f]_\gamma := \sup_{x\neq y,(x,y)\in(\mathbb{R}^d)^2} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\gamma}.$$

Положим для $q \in (1,+\infty]$,

$$\Delta_{\varepsilon,\gamma,q} := \Delta_{\varepsilon,\sigma,\gamma} + \Delta_{\varepsilon,b,q}.$$

Теорема (3.2.1). *Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и конечный неслучайный горизонт по времени $T > 0$. В предположениях **(A)**, определенных выше, для $q > d$, существуют $C := C(q) \ge 1, c := c(q) \in (0,1]$, такие что для всех $0 \le s < t \le T, (x,y) \in (\mathbb{R}^d)^2$:*

$$p_c(t-s, y-x)^{-1} |(p - p_\varepsilon)(s,t,x,y)| \le C\Delta_{\varepsilon,\gamma,q},$$

где $p(s,t,x,.), p_\varepsilon(s,t,x,.)$ - соответствующие переходные плотности в момент времени t решений уравнений (9), (10), *исходящие из x в момент времени s. Кроме того, для заданного $c > 0$ и всех $(u,z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, определим $p_c(u,z) := \frac{c^{d/2}}{(2\pi u)^{d/2}} \exp(-c\frac{|z|^2}{2u})$. Если $q = \infty$, константы C, c не зависят от q.*

Данная и следующая Теоремы будут подробно рассмотрены в Разделе 3.2.1.

Перед тем, как сформулировать результат для случая Марковских цепей, мы должны ввести два типа предположений на инновации в (11). А именно:

(**IG**) Пусть независимые одинаково распределенные случайные величины $(\xi_k)_{k\geq 1}$ удовлетворяют гауссовскому закону с распределением $\mathcal{N}(0, I_d)$. В таком случае, динамика в (11) соответствует дискретизационной схеме Эйлера для уравнения (9).

(**IP**) Для заданного целого $M > 2d + 5 + \gamma$, инновации $(\xi_k)_{k\geq 1}$ центрированы и имеют C^5 гладкую плотность f_ξ, которая вместе со своими производными до порядка 5 имеет полиномиальный рост не более, чем порядка M. То есть, для $z \in \mathbb{R}^d$ и мульти-индекса $\nu, |\nu| \leq 5$:

$$|D^\nu f_\xi(z)| \leq CQ_M(z),$$

где для всех $r > d,\ z \in \mathbb{R}^d,\ \ Q_r(z) := c_r \frac{1}{(1+|z|)^r},\ \int_{\mathbb{R}^d} dz Q_r(z) = 1.$

Теорема (3.2.2)**.** *Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и конечный интервал времени $T > 0$. Для $h = T/N,\ N \in \mathbb{N}^*$, положим для $i \in \mathbb{N},\ t_i := ih$. В предположениях (**A**), если выполнено (**IG**) или (**IP**), для $q > d$ существуют $C := C(q) \geq 1, c := c(q) \in (0, 1]$ такие, что для всех $0 \leq t_i < t_j \leq T, (x, y) \in (\mathbb{R}^d)^2$:*

$$\chi_c(t_j - t_i, y - x)^{-1}|(p^h - p^h_\varepsilon)(t_i, t_j, x, y)| \leq C\Delta_{\varepsilon,\gamma,q},$$

где $p^h(t_i, t_j, x, .), p^h_\varepsilon(t_i, t_j, x, .)$ - соответствующие переходные плотности в момент времени t_j Марковских цепей Y и $Y^{(\varepsilon)}$ в (11), стартующих из x в момент времени t_i. В оценке выше:

- *Если выполнено (**IG**):*

$$\chi_c(t_j - t_i, y - x) := p_c(t_j - t_i, y - x),$$

где p_c определено в Теореме (3.2.1).

- *Если выполнено (**IP**):*

$$\chi_c(t_j - t_i, y - x) := \frac{c^d}{(t_j - t_i)^{d/2}} Q_{M-(d+5+\gamma)}\left(\frac{|y - x|}{(t_j - t_i)^{1/2}/c}\right).$$

Как и ранее, в случае $q = +\infty$ константы C, c не зависят от q.

Продолжая исследования в данной области, V. Konakov и S. Menozzi применили результаты об устойчивости переходных плотностей для изучения оценки слабой ошибки схемы Эйлера в статье [KM17]. Для того, чтобы получить указанную выше оценку в случае негладкого дрифта, авторы [KM17] предлагают применить метод сглаживания коэффициентов. Отличие переходных плотностей диффузий и Марковских цепей от соответствующих переходных плотностей после процедуры сглаживания можно контролировать с помощью оценок, приведенных выше. Таким образом, для контроля слабой ошибки в случае негладких коэффициентов достаточно оценить разницу между переходной плотностью сглаженной диффузии и переходной плотностью схемы со сглаженными коэффициентами. Необходимый результат был получен ранее в статье [KM02].

Заметим, что техника, описанная выше, также использована в статье [KM17] для получения оценки слабой ошибки в случае негладких непрерывных по Гельдеру коэффициентов для масс Дирака, взятых в качестве тестовых функций. В таком случае результат [KM17] может быть обобщен с помощью подхода, представленного в работе [Fri18].

В Главе 4 мы продолжили изучение слабой ошибки для случая негладких коэффициентов, но уже в условии вырожденности СДУ по Колмогорову. Введем вырожденную модель (1) с динамикой процесса $Z_t = (X_t, Y_t)$, задаваемой уравнением:

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t, Y_t)dt + \sigma(X_t, Y_t)dW_t, \\ dY_t = X_t dt, t \in [0, T], \end{cases} \tag{12}$$

где $b : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ - ограниченные и непрерывные по Гельдеру по пространству, и W - броуновское движение на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ с фильтрацией. В (12), $T > 0$ - фиксированный временной интервал. Кроме того, предполагаем матрицу $a(x, y) := \sigma\sigma^*(x, y)$ равномерно эллиптической.

Заметим, что предположения, перечисленные выше, позволяют гарантировать слабую единственность решения уравнения (12).

Такие уравнения были впервые введены в работе А.Н. Колмогорова [Kol34]. В указанной статье, он получил явное выражение переходной плотности процесса для случая постоянных коэффициентов. Подход параметрикса для данных моделей был изучен многими авторами. Так, например, в данном направлении работали Weber [Web51], Sonin [Son67], также следует отметить статью [KMM10]. Адаптируя методику, представленную в статье, указанной выше, мы можем исследовать модели, вырожденные по Колмогорову, с коэффициентами, непрерывными по Гельдеру. Анализ устойчивости также применим к расширенной вырожденной модели. Подробнее все аспекты рассмотренны в Главе 4 (см. также статью [Koz16]).

Введем схему Эйлера для СДУ, задаваемого (12). Для фиксированного натурального N и $T > 0$ определим сетку по времени $\{0, t_1, \dots, t_N\}$ с заданным шагом $h := T/N$, то есть $t_i = ih$, для $i = 0, \dots, N$ и схему

$$\begin{cases} X_t^h = x + \int_0^t b(X_{\phi(s)}^h, Y_{\phi(s)}^h)ds + \int_0^t \sigma(X_{\phi(s)}^h, Y_{\phi(s)}^h)dW_s, \\ Y_t^h = y + \int_0^t X_s^h ds. \end{cases} \tag{13}$$

где $\phi(t) = t_i \; \forall t \in [t_i, t_{i+1})$. Заметим, что схема, предложенная выше, корректно определена, несмотря на то, что невырожденная компонента схемы находится под знаком интеграла. На каждом шаге приращения схемы $(X_t^h, Y_t^h)_{t\in[t_i,t_{i+1}]}$, $i \geq 0$ - гауссовские величины.

Кроме того, для заданного $c > 0$ и всех $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^{2d}$ введем плотность по типу Колмогорова

$$p_{c,K}(t,(x,y),(x',y')) := \frac{c^d 3^{d/2}}{(2\pi t^2)^d} \exp\left(-c\left[\frac{|x'-x|^2}{4t} + 3\frac{|y'-y-(x+x')t/2|^2}{t^3}\right]\right). \quad (14)$$

Отметим, что в Главе 4 мы рассматриваем однородные по времени коэффициенты b, σ и условия, специфичные для вырожденного случая.

(AD1) (Ограниченность коэффициентов).

Компоненты вектор-функции $b(x, y)$ и матрицы $\sigma(x, y)$ ограничены. А именно, существует константа K, такая, что

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{2d}} |b(x,y)| + \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{2d}} |\sigma(x,y)| \le K.$$

(AD2) (Равномерная эллиптичность).

Матрица $a := \sigma\sigma^*$ равномерно эллиптична, то есть существует $\Lambda \ge 1$, $\forall (x, y, \xi) \in (\mathbb{R}^d)^3$,

$$\Lambda^{-1}|\xi|^2 \le \langle a(x,y)\xi, \xi\rangle \le \Lambda|\xi|^2.$$

(AD3) (Непрерывность по Гельдеру по пространству).

Для некоторых $\gamma \in (0, 1]$, κ,

$$|b(x,y) - b(x',y')| + |\sigma(x,y) - \sigma(x',y')| \quad \le \quad \kappa\left(|x-x'|^\gamma + |y-y'|^{\gamma/3}\right).$$

Будем говорить, что выполнены условия **(AD)**, если выполнены **(AD1)**-**(AD3)**.

В указанных предположениях введем возмущенные версии процессов (12) и (13). В частности, для $b_\varepsilon : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^d$, $\sigma_\varepsilon : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$, удовлетворяющих, по крайней мере, тем же условиям, что и b, σ, которые, при этом, в некотором смысле близки к b, σ при малых значениях $\varepsilon > 0$, обозначим:

$$\begin{cases} dX_t^{(\varepsilon)} = b_\varepsilon(X_t^{(\varepsilon)}, Y_t^{(\varepsilon)})dt + \sigma(X_t^{(\varepsilon)}, Y_t^{(\varepsilon)})dW_t, \\ dY_t^{(\varepsilon)} = X_t^{(\varepsilon)}dt, t \in [0, T], \end{cases} \quad (15)$$

и, аналогично:

$$\begin{cases} X_t^{\varepsilon,h} = x + \int_0^t b_\varepsilon(X_{\phi(s)}^{\varepsilon,h}, Y_{\phi(s)}^{\varepsilon,h})ds + \int_0^t \sigma_\varepsilon(X_{\phi(s)}^{\varepsilon,h}, Y_{\phi(s)}^{\varepsilon,h})dW_s, \\ Y_t^{\varepsilon,h} = y + \int_0^t X_s^{\varepsilon,h}ds. \end{cases} \quad (16)$$

для $t \in [0, t_j), 0 < j \le N$, где $\phi(t) = t_i\ \forall t \in [t_i, t_{i+1})$.

Рассмотрим также особый случай непрерывности по Гельдеру для неравномерной шкалы системы и однородных по времени коэффициентов для $\varepsilon > 0$:

$$\forall q \in (1, +\infty],\ \Delta_{\varepsilon,b,q}^d := |b(.,.) - b_\varepsilon(.,.)|_{L^q(\mathbb{R}^{2d})}.$$

Кроме того, определим

$$\Delta^d_{\varepsilon,\sigma,\gamma} := |\sigma(.,.) - \sigma_\varepsilon(.,.)|_{d,\gamma},$$

где $\gamma \in (0,1]$, $|.|_{d,\gamma}$ означает норму Гельдера в пространстве $C^\gamma_{b,\mathbf{d}}(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$ - непрерывных по Гельдеру ограниченных функций с расстоянием $\mathbf{d}$, определенным следующим образом:

$$\forall (x,y),\ (x',y') \in (\mathbb{R}^d)^2,\ \mathbf{d}\big((x,y),(x',y')\big) := |x-x'| + |y'-y|^{1/3}.$$

То есть, для функции f из $C^\gamma_{b,\mathbf{d}}(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$

$$|f|_{\mathbf{d},\gamma} := \sup_{x,y\in\mathbb{R}^{2d}} |f(x,y)| + [f]_{\mathbf{d},\gamma},\ [f]_{d,\gamma} := \sup_{(x,y)\neq(x',y')\in\mathbb{R}^{2d}} \frac{|f(x,y)-f(x',y')|}{\mathbf{d}\big((x,y),(x',y')\big)^\gamma} < +\infty.$$

Положим, $\forall q \in (1,+\infty]$,

$$\Delta^d_{\varepsilon,\gamma,q} := \Delta^d_{\varepsilon,\sigma,\gamma} + \Delta^d_{\varepsilon,b,q},$$

что будет в дальнейшем ключевой величиной для оценки ошибки.

Теорема (4.3.1)**.** *Фиксируем $T > 0$. В условиях* ***AD****, для $q \in (4d,+\infty]$, существуют $C := C(q) \geq 1, c \in (0,1]$, такие что, для всех $0 < t \leq T, ((x,y),(x',y')) \in (\mathbb{R}^{2d})^2$:*

$$|(p-p_\varepsilon)(t,(x,y),(x',y'))| \leq C\Delta^d_{\varepsilon,\gamma,q} p_{c,K}(t,(x,y),(x',y')),$$

где $p(t,(x,y),(.,.)), p_\varepsilon(t,(x,y),(.,.))$ - соответственные переходные плотности в момент времени t уравнений (12), (15)*, стартующих из (x,y) в момент времени* 0*.*

Теорема (4.3.5)**.** *Фиксируем $T > 0$ и определим временную шкалу $\Lambda_h := \{(t_i)_{i\in[\![1,N]\!]}\}, N \in \mathbb{N}^*$. В условиях* ***AD****, существуют $C \geq 1, c \in (0,1]$ такие, что для всех $0 < t_j \leq T, ((x,y),(x',y')) \in (\mathbb{R}^{2d})^2$:*

$$|p^\varepsilon_h - p_h|(t_j,(x,y),(x',y')) \leq C\Delta^d_{\varepsilon,\sigma,\gamma} p_{c,K}(t_j,(x,y),(x',y')),$$

где $p^\varepsilon_h(t,(x,y),(.,.)), p_h(t,(x,y),(.,.))$ - соответствующие переходные плотности в момент времени t решений уравнений (13), (16)*, стартующих из точки (x,y) в момент времени* 0*.*

Указанные выше две Теоремы будут подробно обсуждаться в Разделе 4.3.1.

Анализ устойчивости переходных плотностей будет использован, как и в работе [KM17], для того, чтобы оценить слабую ошибку, ассоциированную со схемой Эйлера, введенной ранее в работе [LM10] для уравнений вида (12). Однако, для проведения анализа нам необходимо немного изменить предположения о модели **(AD)**. Точнее, нам необходимо изменить условия относительно непрерывности по Гельдеру коэффициентов.

Вместо условия (**AD3**), мы предположим, что для некоторых $\gamma \in (0,1]$, $\kappa < \infty$,

$$|b(x,y) - b(x',y')| + |\sigma(x,y) - \sigma(x',y')| \quad \leq \quad \kappa\left(|x-x'|^{\gamma} + |y-y'|^{\gamma/2}\right).$$

и обозначим данное условие за ($\hat{\mathbf{A}}\mathbf{D3}$). Будем говорить, что выполнены условия **($\hat{\mathbf{A}}$D)**, если выполнены **(AD1)**,**(AD2)**, **($\hat{\mathbf{A}}$D3)**.

Теорема (4.4.1)**.** *Зафиксируем $T > 0$. В условиях **($\hat{\mathbf{A}}$D)** для любой тестовой функции $f \in C^{\beta,\beta/2}(\mathbb{R}^{2d})$ ($\beta-$непрерывной по Гельдеру по первой переменной и $\beta/2$-непрерывной по Гельдеру по второй переменной) для $\beta \in (0,1]$, существует $C > 0$, такая что:*

$$|\mathbb{E}_{(x,y)}[f(X_T^h, Y_T^h)] - \mathbb{E}_{(x,y)}[f(X_T, Y_T)]| \leq Ch^{\gamma/2}(1 + |x|^{\gamma/2}).$$

где $\gamma \in (0,1]$ обозначает индекс Гельдера для $\gamma, \gamma/2$ непрерывных по Гельдеру, однородных по времени функций b, σ.

Теорема будет подробно рассмотрена в Разделе 4.4. Мы так же хотели бы представить оценки, полученные для разности переходных плотностей

$p(t,(x,y),(x',y'))$ и $p_h(t,(x,y),(x',y'))$. В конечном итоге, мы можем получить оценку глобальной ошибки порядка $h^{\beta}, \beta < \gamma - 1/2$, что в некотором смысле близко к ожидаемому порядку $h^{\gamma/2}$, если γ стремится к 1.

Возможно, желающие усилить данный результат могут воспользоваться иными подходами к оценке ошибки - изменить аппроксимационную схему или стандартную декомпозицию ошибки, использованную в работах [KM10], [KM17], [Fri18]).

Теорема (4.5.1)**.** *Зафиксируем конечный временной горизонт $T > 0$ и шаг по времени $h = T/N, N \in \mathbb{N}^*$ для схемы Эйлера. В предположениях **($\hat{\mathbf{A}}$D)**, для $\gamma \in (1/2, 1]$ и $\beta \in (0, \gamma - \frac{1}{2})$, для всех t на временной решетке $\Lambda_h := \{(t_i)_{i \in [\![1,N]\!]}\}$ и $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^{2d}$, существуют $C := (T,b,a,\beta), c > 0$, такие что:*

$$\begin{aligned} &|p(t,(x,y),(x',y')) - p_h(t,(x,y),(x',y')| \\ \leq Ch^{\beta}(1 + (|x| \wedge |x'|))^{1+\gamma}) &\sup_{s \in [t-h,t]} p_{c,K}(s,(x,y),(x',y')), \end{aligned} \tag{17}$$

где $p_{c,K}(s,(x,y),(x',y'))$ есть гауссовская плотность по типу Колмогорова, введенная в (14)*, в момент времени s.*

Данная Теорема обсуждается подробно в Разделе 4.5.

Список литературы

[Aro59] D. G Aronson. The fundamental solution of a linear parabolic equation containing a small parameter. *Illinois Journal of Mathematics*, 3:580–619, 1959.

[Bai17] N.T.G. Bailey. *The mathematical theory of infectious diseases and its applications.* 2nd ed. Hafner Press, New York, 2017.

[BP09] R.F. Bass and E.A. Perkins. A new technique for proving uniqueness for martingale problems. *From Probability to Geometry (I): Volume in Honor of the 60th Birthday of Jean-Michel Bismut*, pages 47–53, 2009.

[BT96a] V. Bally and D. Talay. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations: I. Convergence rate of the distribution function. *Probability Theory and Related Fields*, 104-1:43–60, 1996.

[BT96b] V. Bally and D. Talay. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations, II. Convergence rate of the density. *Monte Carlo Methods and Applications*, 2:93–128, 1996.

[BY89] N. Becker and P. Yip. Analysis of variations in an infection rate. *Australian Journal of Statistics*, 31(1), 1989.

[DM10] F. Delarue and S. Menozzi. Density estimates for a random noise propagating through a chain of differential equations. *Journal of Functional Analysis*, 259–6:1577–1630, 2010.

[Fri18] N. Frikha. On the weak approximation of a skew diffusion by an Euler-type scheme. *Bernoulli*, 24(3):1653–1691, 2018.

[GS67] I. Gihman and A. Skorohod. *Stochastic Differential Equations.* Naukova dumka, Kiev., 1967.

[GS82] I. Gihman and A. Skorohod. *Stochastic Differential Equations and Applications.* Naukova dumka, Kiev., 1982.

[IKO62] A. M. Il'in, A. S. Kalashnikov, and O. A. Oleinik. Second-order linear equations of parabolic type. *Uspehi Mat. Nauk*, 17–3(105):3–146, 1962.

[JYC10] M. Jeanblanc, M. Yor, and M. Chesney. *Mathematical Methods for Financial Markets.* Springer Finance, London, 2010.

[KKM17] V. Konakov, A. Kozhina, and S Menozzi. Stability of densities for perturbed Diffusions and Markov Chains. *ESAIM: Probability and Statistics*, 21:88–112, 2017.

[KM00] V. Konakov and E. Mammen. Local limit theorems for transition densities of Markov chains converging to diffusions. *Probability Theory and Related Fields*, 117:551–587, 2000.

[KM02] V. Konakov and E. Mammen. Edgeworth type expansions for Euler schemes for stochastic differential equations. *Monte Carlo Methods and Applications*, 8–3:271–285, 2002.

[KM10] V. Konakov and S. Menozzi. Weak error for stable driven stochastic differential equations: Expansion of the densities. *Journal of Theoretical Probability*, 24-2:554–578, 2010.

[KM17] V. Konakov and S Menozzi. Weak Error for the Euler Scheme Approximation of Diffusions with non-smooth coefficients. *Electronic Journal of Probability*, 22:1–47, 2017.

[KMM10] V. Konakov, S. Menozzi, and S. Molchanov. Explicit parametrix and local limit theorems for some degenerate diffusion processes. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Série B*, 46–4:908–923, 2010.

[Kol34] A. N. Kolmogorov. Zufällige Bewegungen (zur Theorie der Brownschen Bewegung). *Annals of Mathematics*, 2-35:116–117, 1934.

[Koz16] A. Kozhina. Stability of densities for perturbed degenerate diffusions. *Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya*, 3:570–579, 2016.

[Kry96] N. V. Krylov. *Lectures on elliptic and parabolic equations in Hölder spaces*. Graduate Studies in Mathematics 12. AMS, 1996.

[KS84] S. Kusuoka and D. Stroock. Applications of the Malliavin calculus. I. *Stochastic analysis (Katata/Kyoto, 1982)*, North-Holland Math. Library, 32:271–306, 1984.

[KS85] S. Kusuoka and D. Stroock. Applications of the Malliavin calculus. II. *Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo*, 32:1–76, 1985.

[LM10] V. Lemaire and S. Menozzi. On some non asymptotic bounds for the Euler scheme. *Electronic Journal of Probability*, 15:1645–1681, 2010.

[Mar55] G. Maruyama. Continuous markov processes and stochastic equations. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 4:48, 1955.

[Men11] S. Menozzi. Parametrix techniques and martingale problems for some degenerate Kolmogorov equations. *Electronic Communications in Probability*, 17:234–250, 2011.

[MP91] R. Mikulevičius and E. Platen. Rate of convergence of the Euler approximation for diffusion processes. *Mathematische Nachrichten*, 151:233–239, 1991.

[Son67] I. M. Sonin. A class of degenerate diffusion processes (russian). *Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya*, 12:540–547, 1967.

[Tal02] D. Talay. Stochastic Hamiltonian dissipative systems: exponential convergence to the invariant measure, and discretization by the implicit Euler scheme. *Markov Processes and Related Fields*, 8–2:163–198, 2002.

[TT90] D. Talay and L. Tubaro. Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations. *Stochastic Analysis and Applications*, 8-4:94–120, 1990.

[Web51] M. Weber. The fundamental solution of a degenerate partial differential equation of parabolic type. *Transactions of the American Mathematical Society*, 71:24–37, 1951.